Μαθηματομάνια

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι , αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

Μονάδες 8

Α2. Έστω f μια συνάρτηση και Α (x_0 , f (x_0)) ένα σημείο της C_f .

Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α .

Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης στο Α. **Μονάδες 7**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α) Ισχύει ο τύπος $\left(3^{\chi}\right)' = \chi \cdot 3^{\chi-1}$ για κάθε x $\in R$.

β. Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, *τότε* $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

γ. Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 , αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο ψ του συνόλου τιμών της η εξίσωση f (x) = ψ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

δ. Ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1$.

ε. Για κάθε $x \in R_1 = R - \{\, x \,/\, \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \,\}$ *ισχύει* : $(\varepsilon\varphi\chi)' = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1$, $x>0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0\ ,\ 1\ ]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [\ 1\ ,\ +\infty\ )$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{13}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες .

Μονάδες 8

Β3. Αν x_1, x_2 $\mu\varepsilon$ $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Β2 , να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\ x_1\ ,\ x_2\ )$ τέτοιο , ώστε

$f'(x_0)+f(x_0)=12$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο [1 , 2] , παραγωγίσιμη στο (1 , 2) και ισχύει f (1) – f (2) = - 3 .

Γ1. Αν 2 < f (2) < 4 , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$ **Μονάδες 5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (1,2)$ με $f'(x_1)=4x_1-3$

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_2, x_3 \in (1,2)$ τέτοια ώστε :

$f'(x_2)+f'(x_3)=6$ **Μονάδες 7**

Γ4. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1 , 2] και ισχύει :

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{f(1)+f(2)}{2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$f''(\xi)=0$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f : R \to (0,+\infty)$ με $f(x+\psi) = f(x)\cdot f(\psi)$ για κάθε $x, \psi \in R$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0)=1$ τότε :

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x \in R$. **Μονάδες 7**

Δ2. Να βρείτε τη συνάρτηση f . **Μονάδες 6**

Δ3. Αν $g(x) = -x^2 - x$ να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α (0 , 1) εφάπτεται και της C_g . **Μονάδες 6**

Δ4. Αν $h(x)=\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο . **Μονάδες 6**

Επειδή η γνώση είναι Θησαυρός...

Μαθητομάνια

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , τότε να αποδείξετε ότι : $f'(x_0) = 0$. **Μονάδες 8**

Α2. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Rolle ; **Μονάδες 7**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α) Αν $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = l$ τότε οι συναρτήσεις f , g έχουν πάντοτε όριο στο x_0 .

β) Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο R , ισχύει

$$f(x_1)=1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(x_2)=4,$$

τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] , παραγωγίσιμη στο (α , β) με f (α) = f (β) και $f''(x) > 0$, για κάθε x∈[α , β] τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο (α , β).

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^5+x^3-2}{x^2+x+13}$ έχει μια πλάγια ασύμπτωτη .

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = \dfrac{g^4(\alpha)}{x^2 + 3g^2(\alpha)}$,

για κάθε $x \in R$ και $g:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ $\kappa\alpha\iota$ $g(1)=1$.

Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται . **Μονάδες 5**

Β. Να δείξετε ότι $2\int_1^2 \left((gog)og^{-1}\right)(x)\,dx = g(3)$. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων καμπής της f .

Μονάδες 5

Δ. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α ώστε , οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία καμπής να είναι παράλληλες . **Μονάδες 5**

Ε. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα (0 , α) για α < 4 . **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to R$ $\mu\varepsilon$ $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} , & x > 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$

Γ1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια . **Μονάδες 5**

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα . **Μονάδες 5**

Γ3. Να συγκρίνετε τους αριθμούς : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$. **Μονάδες 5**

Γ4. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του κ > 0 για τον οποίο ισχύει :

$\ln x \le x \cdot \ln \kappa$, $x > 0$. **Μονάδες 5**

Γ5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της

M (x_0 , f (x_0)) , $x_0 > 0$, η οποία διέρχεται από το σημείο O (0,0).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν : $i)\ f(1)=1 \quad ii)\ f(2)=2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε :

$f(x_0)=\dfrac{3}{2}$. **Μονάδες 5**

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε :

$f'(x_1)=1$. **Μονάδες 5**

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ $\mu\varepsilon$ $x_1<x_2$ τέτοια

ώστε : $f'(x_1)+f'(x_2)=2$. **Μονάδες 7**

Δ4. Αν $h(x)=\ln\left(x^2+f(1)\right)$, $x\in R$ και g μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο R της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο K(1,0) και για κάθε $x\in R$ ικανοποιεί τη σχέση $g''(x)=\dfrac{8x}{e^{h(x^2)}}$, να αποδείξετε ότι : $\int_0^1 g(x)dx=h(1)$.

Μονάδες 8

Επειδή η γνώση είναι θησαυρός...

Επειδή η γνώση είναι θησαυρός...